岩手大学

2015年 教育学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 2つの関数 $f(x)=x^3+x^2-5x$，$g(x)=x^3-2x^2+ax+b$ について，曲線 $y=f(x)$ を C_1，曲線 $y=g(x)$ を C_2 とする．ただし，a，b は定数である．

関数 $f(x)$ が極大となるときの x の値を k とし，点 $(k,\ g(k))$ における曲線 C_2 の接線の傾きは -18 であるとする．

さらに，2つの曲線 C_1，C_2 はいずれもある1点Pを通り，点Pにおける C_1 の接線と点Pにおける C_2 の接線が一致しているとき，次の問いに答えよ．

(1) k の値を求めよ．

(2) a，b の値をそれぞれ求めよ．

(3) 直線 $x=k$ と y 軸，および2曲線 C_1，C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x)=3x^2+2x-5$

$=(3x+5)(x-1)$

x	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{175}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$
		極大		極小	

∴ 増減表より．$f(x)$ が極大となるのは．

$\underline{x=k=-\frac{5}{3}}$ //

(2) $g'(x)=3x^2-4x+a$

∴ $g'(k)=-18$ より．

$3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+a=-18$

∴ $\underline{a=-33}$ //

$f'(x)=g'(x)$ となる x を求める．

$3x^2+2x-5=3x^2-4x-33$

∴ $x=-\frac{14}{3}$

$f(x)-g(x)=0$ の解の1つが $x=-\frac{14}{3}$

∴ $3x^2+28x-b=0$ に $x=-\frac{14}{3}$ を代入して．

$\underline{b=-\frac{196}{3}}$ //

(3) $3x^2+28x+\frac{196}{3}=0$ を解くと，

$x=-\frac{14}{3}$（重解）

また，$f(x)-g(x)=3\left(x+\frac{14}{3}\right)^2\geqq 0$ より，

$S=\int_{-\frac{5}{3}}^{0} f(x)-g(x)\,dx$

$=\int_{-\frac{5}{3}}^{0} 3\left(x+\frac{14}{3}\right)^2 dx$

$=\left[\left(x+\frac{14}{3}\right)^3\right]_{-\frac{5}{3}}^{0}$

$=\left(\frac{14}{3}\right)^3-3^3$

$=\underline{\frac{2015}{27}}$ //