0002099810097999

岩手大学

2015年 工学部 第4問

数理 石井K

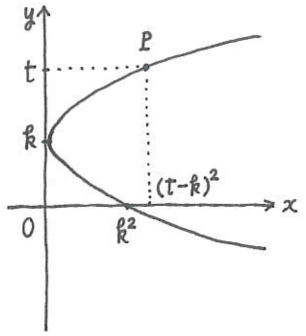
$\boxed{4}$ 方程式 $x-(y-k)^2=0$ で表される曲線 C 上に動点 $\mathrm{P}((t-k)^2,\ t)$ があって，点Pと点 $(k^2,\ 0)$ との距離の2乗を $f(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$k>0$ とする．

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) $f(t)$ の導関数を $f'(t)$ とするとき，方程式 $f'(t)=0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

(3) $k=2$ のとき，$f(t)$ の極大値を求めよ．

(1) $x=(y-k)^2$ より，右図のようになる．



(2) $f(t)=\{k^2-(t-k)^2\}^2+(-t)^2$

$= (2kt-t^2)^2+t^2$

$= t^4-4kt^3+(4k^2+1)t^2$

$\therefore f'(t)=4t^3-12kt^2+2(4k^2+1)t$

$= 2t(2t^2-6kt+4k^2+1)$

$2t^2-6kt+4k^2+1=0$ は $k>0$ より $t=0$ を解にもつことはない．

$\therefore f'(t)=0$ の解は，$t=0$ と $2t^2-6kt+4k^2+1=0$ の解をあわせたものである．

判別式 $D/4=(-3k)^2-2(4k^2+1)$

$= k^2-2$

$$\therefore \begin{cases} 1\text{個} & (0<k<\sqrt{2}\ \text{のとき}) \\ 2\text{個} & (k=\sqrt{2}\ \text{のとき}) \\ 3\text{個} & (k>\sqrt{2}\ \text{のとき}) \end{cases}$$ //

(3) $k=2$ のとき，$f(t)=t^4-8t^3+17t^2$

$f'(t)=2t(2t^2-12t+17)$

$\therefore f'(t)=0$ となるのは，$t=0,\ \dfrac{6\pm\sqrt{2}}{2}$

$\alpha=\dfrac{6-\sqrt{2}}{2}$，$\beta=\dfrac{6+\sqrt{2}}{2}$ とおくと，増減表は右のようになる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗	極大	↘		↗

ちょっと計算大変！

$2\alpha^2-12\alpha+17=0$ を用いて $f(\alpha)$ を計算すると

$f(\alpha)=\alpha^4-8\alpha^3+17\alpha^2$

$= \alpha^2(\alpha^2-8\alpha+17)$

$= \left(6\alpha-\dfrac{17}{2}\right)\left(-2\alpha+\dfrac{17}{2}\right)$

$= -12\left(6\alpha-\dfrac{17}{2}\right)+68\alpha-\dfrac{289}{4}$

$= -4\alpha+\dfrac{119}{4}$

$= \dfrac{71}{4}+2\sqrt{2}$ //