2012年 医学部 第3問

3 関数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ について，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ．

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく．$x > 0$ について

$$\sqrt[3]{x} - 1 < g(x) < \sqrt[3]{x} + 1$$

が成立することを示せ．

(3) $b > a > 0$ について

$$0 < \int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ．

(4) 自然数 n について，(2) で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n = \int_n^{2n} \frac{1}{\{g(x)\}^3 + g(x)}\,dx$$

とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ．