福島大学

2015年 人文B 第4問

4 空間に4点O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, −1)がある.

(1) 3点A, B, Cを通る平面αの方程式を求めなさい.

(2) 平面αに垂直になるように原点Oから直線を引いたとき, 平面αとの交点Tの座標を求めなさい.

(3) △ABCの面積を求めなさい.

(4) 四面体OABCの体積を求めなさい.

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,-1)$

∴ 平面α上の任意の点を$P(x,y,z)$とおくと,

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s,tは実数)

$=(-s-t,s,-t)$

∴ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OA}=(1-s-t,s,-t)$

∴ $x=1-s-t$, $y=s$, $z=-t$

∴ 平面αの方程式は, $\underline{x+y-z=1}$ //

(2) (1)より, $\overrightarrow{OT}=(1-s-t,s,-t)$と表せる

$\overrightarrow{OT}\perp\alpha$より, $\overrightarrow{OT}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OT}\perp\overrightarrow{AC}$ よって, $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{AB}=-1+s+t+s=0$ ∴ $2s+t=1$ …①

$\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+s+t+t=0$ ∴ $s+2t=1$ …②

①,②より, $s=t=\frac{1}{3}$ ∴ $\underline{T\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}$ //

(3) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$, $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$ ∴ $\angle BAC=60^\circ$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ //

(4) $|\overrightarrow{OT}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot|\overrightarrow{OT}|$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\underline{\frac{1}{6}}$ //