

2016年 中等教育 第3問

 数理
石井

3 複素数 z は実部が $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 虚部は正で $|z|=1$ である. 次の問いに答えよ.

- (1) $(z + \frac{1}{z})^2 + (z + \frac{1}{z})$ の値を求めよ.
 (2) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ の値を求めよ.
 (3) z の偏角 θ を求めよ. ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

$$(1) |z|=1 \text{ より } z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{z} = \bar{z}$$

$$z \text{ の実部が } \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ より, } \bar{z} \text{ の実部も } \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore z + \frac{1}{z} &= z + \bar{z} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore (z + \frac{1}{z})^2 + (z + \frac{1}{z}) = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \underline{1} //$$

(2) (1) の式を展開して,

$$z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} = 1$$

両辺に z^2 をかけて整理すると,

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \underline{0} //$$

$$\begin{aligned} (3) z^5 - 1 &= (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \\ &= 0 \quad (\because (2) \text{ の結果より}) \end{aligned}$$

$$\therefore z^5 = 1$$

ここで, $|z|=1$ なので $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおける.

$$\therefore (\cos \theta + i \sin \theta)^5 = 1$$

$$\therefore \cos 5\theta + i \sin 5\theta = 1$$

$$\therefore 5\theta = 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \therefore \theta = \frac{2n\pi}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, z \text{ の実部が } \frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0, \text{ 虚部が正より, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, 条件をみたす } n \text{ は } n=1 \quad \therefore \theta = \underline{\frac{2\pi}{5}} //$$