茨城大学

2010年 理学部 第2問

$\boxed{2}$ p を $0<p<1$ を満たす有理数の定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=|x|^p$ と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ の概形を描け．

(2) a を 0 でない実数の定数とするとき，点 $(a,\ f(a))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式を求めよ．また，接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める：$a_1=1$ とし，$n \geqq 2$ のとき a_n を点 $(a_{n-1},\ f(a_{n-1}))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標とする．このとき一般項 a_n を n と p を用いて表せ．

(4) (3) で求めた数列 $\{a_n\}$ について，点 $(a_n,\ f(a_n))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と，x 軸，および直線 $x=a_n$ とで囲まれた部分の面積を T_n とする．T_n を n と p を用いて表せ．

(5) (4) の T_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について，無限級数 $T_1+T_2+T_3+\cdots$ が収束する p の範囲を求めよ．また，収束するときの無限級数の値を求めよ．