0001862637318999

茨城大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ サイコロを2回続けて振って出た目の数を順に a, b とする．このとき，3次関数 $f(x) = x^3 - ax + b$ について以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の極大値と極小値を a, b を用いて表せ．

(2) 3次方程式 $f(x) = 0$ が相異なる実数解をちょうど2つ持つような a, b の組を求めよ．

(3) (2)で求めた a, b の組に対して，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(4) $f(x) = 0$ が相異なる3つの実数解を持つ確率を求めよ．

(1) $f'(x) = 3x^2 - a$

$\therefore f'(x) = 0$ となるのは． $x = \pm\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$ $(\because a > 0)$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

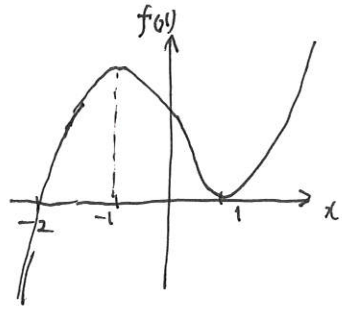
$\therefore$ 極大値は $f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + b$ //

極小値は $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + b$ //

(2) 重解をもつので， $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + b = 0$ または $-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + b = 0$

ここで， $a, b > 0$ より． $4a^3 = 27b^2$

a, b は自然数より． $(a, b) = (3, 2)$ //



(3) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$S = \int_{-2}^{1} x^3 - 3x + 2\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{27}{4}$$ //

(4) (極大値) > 0 $(\because (1)$より$)$ なので，(極小値) < 0 となればよい

$\therefore -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + b < 0$ $\quad \therefore b < \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

$a, b > 0$ より． $4a^3 > 27b^2$

$\therefore (a, b) = (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2),$
$(5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$

$\therefore \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ //