

2012年工学部第1問

1 次の問に答えなさい。

- (1) 実数  $x, y$  に関する以下の命題で正しいものは証明し、誤っているものは反例をあげなさい。
- (i)  $x$  と  $y$  が共に無理数であることは  $x + y$  が無理数であることの十分条件である。
  - (ii)  $x$  と  $y$  のいずれかが無理数であることは  $x + y$  が無理数であることの必要条件である。
  - (iii)  $x$  が有理数で  $y$  が無理数であることは  $x + y$  が無理数であることの十分条件である。
- (2) 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$  ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ) で定義する。このとき、すべての正の整数  $n$  に対して次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$