星薬科大学

2014年 薬学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 2つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 3$, $C_2 : y = x^2 - 6x + 9$ と，C_1，C_2 の両方に接する直線 ℓ について次の問に答えよ．

(1) C_1 と C_2 との交点の座標は ($\boxed{42}$ 2, $\boxed{43}$ 1) である．

(2) C_1 と ℓ との接点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{44}\ 1}{\boxed{45}\ 2},\ -\dfrac{\boxed{46}\boxed{47}\ 11}{\boxed{48}\ 4}\right)$ であり，C_2 と ℓ との接点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{49}\ 7}{\boxed{50}\ 2},\ \dfrac{\boxed{51}\ 1}{\boxed{52}\ 4}\right)$ である．

(3) C_1 と C_2 および ℓ とで囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{53}\ 3}{\boxed{54}\ 2}$ である．

(1) $x^2 - 3 = x^2 - 6x + 9$ $\therefore 6x = 12$ $x = 2$, $y = 1$ $\therefore$ $(2, 1)$ //

(2) 接線はy軸に平行でないから．$y = ax + b$ とおける．

$\therefore x^2 - 3 - ax - b = 0$ が重解をもてばよいから

$D = a^2 + 4(3 + b)$ $\therefore a^2 + 4b + 12 = 0$ $\cdots$ ①

同様に．$x^2 - 6x + 9 - ax - b = 0$ $D = (-6 - a)^2 - 4(9 - b) = 0$

$\therefore a^2 + 12a + 4b = 0$ $\cdots$ ② ①，②より．$a = +1$, $b = -\frac{13}{4}$

$\therefore x^2 - 3 - x + \frac{13}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ $\therefore$ C_1 と ℓ の接点は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ //

$x^2 - 6x + 9 - x + \frac{13}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0$ $\therefore$ C_2 と ℓ の接点は $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$ //

(3) (1)，(2)より

$$S = \int_2^{\frac{7}{2}} x^2 - 6x + 9 - x + \frac{13}{4}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 - 3 - x + \frac{13}{4}\,dx$$

$$= \left[\frac{\left(x - \frac{7}{2}\right)^3}{3}\right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{4}$$ //