



2012年第2問

2  $f(x) = x^2 - 5$ として、数列  $\{a_n\}$  を次のように定義する。

$a_1 = 3$ , 点  $(a_n, f(a_n))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線が  $x$  軸と交わる点の  $x$  座標を  $a_{n+1}$  とする ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。

次の問いに答えよ。

- (1)  $a_{n+1}$  を  $a_n$  で表せ。
- (2) 命題  $P(n)$  を  $[\sqrt{5} < a_{n+1} < a_n]$  とするとき、すべての正の整数  $n$  に対して  $P(n)$  が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) 次の不等式が共に成り立つ 1 より小さい正の数  $r$  が存在することを示せ。
  - (a)  $a_{n+1} - \sqrt{5} \leq r(a_n - \sqrt{5})$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )
  - (b)  $a_n - \sqrt{5} \leq r^{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )