

2016年農・教育文化（文系）第1問

1 $\triangle ABC$ において、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $AB : AC = 5 : 4$ とする。辺 BC の点 C 側の延長上に、 $CA = CD$ となる点 D をとる。辺 AB の中点を E とし、点 B から直線 AD に下した垂線を BF とするとき、次の各問に答えよ。

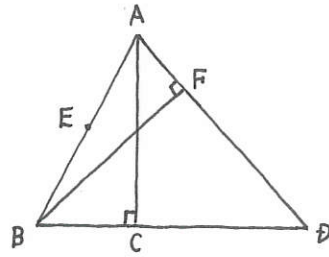
(1) $EF = EC$ を示せ。

(2) 面積比 $\triangle ABC : \triangle CEF$ を求めよ。

(1) $\angle AFB = \angle ACB = 90^\circ$ より、

$\triangle AFB$ と $\triangle ACB$ は点 E を中心とする半径 AE の円に内接する。

よって、 $EF = EC (= AE)$ \square



(2) $AB = 5R$ 、 $AC = 4R$ とおく ($R > 0$)。

$$BC = 3R, CD = 4R, AD = 4\sqrt{2}R$$

$\triangle FBD$ は $\angle BFD = 90^\circ$ 、 $\angle D = 45^\circ$ の直角二等辺三角形なので

$$FD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{2}R$$

\therefore 余弦定理を $\triangle FCD$ に適用して、

$$\begin{aligned} FC^2 &= \left(\frac{7}{2}\sqrt{2}R\right)^2 + (4R)^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}\sqrt{2}R \cdot 4R \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{49}{2}R^2 + 16R^2 - 28R^2 \\ &= \frac{25}{2}R^2 \end{aligned}$$

$$\therefore FC = \frac{5}{2}\sqrt{2}R$$

$$(1) \text{より}, EF = EC = \frac{5}{2}R$$

$\therefore \triangle CEF$ は $EF = EC$ の直角二等辺三角形である

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC : \triangle CEF &= \frac{1}{2} \cdot 3R \cdot 4R : \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}R\right)^2 \\ &= 6R^2 : \frac{25}{8}R^2 \\ &= \underline{\underline{48 : 25}} \end{aligned}$$