2010年 経済学部 第3問

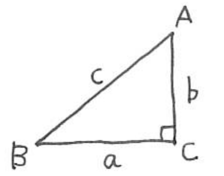
数理 石井K

$\boxed{3}$ △ABCにおいて，BC，CA，ABの長さを，それぞれ a，b，c とする．以下の問に答えよ．

(1) ∠Cが90°のとき，$\sin^2 A + \sin^2 B = 1$ であることを示せ．

(2) $\sin B = 2\sin A\cos C$，$a : b = 1 : \sqrt{3}$，$c = 3$ のとき，△ABCの面積を求めよ．

(1) $A + B + C = 180°$ より $\angle C = 90°$ のとき．



$B = 90° - A$

$\therefore \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2(90° - A)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1$ ■

(2) $a : b = 1 : \sqrt{3}$ より $b = \sqrt{3}a$ …①

正弦定理より．$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ …②

①，②より．$a\sin B = \sqrt{3}a\sin A$ $\therefore \sin B = \sqrt{3}\sin A$ …③

$\sin B = 2\sin A\cos C$ に③を代入して

$\sqrt{3}\sin A = 2\sin A\cos C$ $\therefore \sin A(\sqrt{3} - 2\cos C) = 0$

$0° < \sin A < 180°$ より $\sin A > 0$ なので

$\cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore C = 30°$

$b = \sqrt{3}a$ として余弦定理より．

$3^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 - 2\cdot a\cdot\sqrt{3}a\cdot\cos 30°$

$\therefore a^2 = 9$ $a > 0$ より $a = 3$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sin 30°$

$= \underline{\dfrac{9}{4}\sqrt{3}}$ //