

2011年第6問



6 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ のとき、 $\frac{2}{1+2\sin^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x}$ の最大値と最小値、およびそれらの値をとるときの x の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \frac{2(1+\cos^2 x) + 1 + 2\sin^2 x}{(1+2\sin^2 x)(1+\cos^2 x)} \\
 &= \frac{5}{1+\cos^2 x + 2\sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x} \\
 &= \frac{5}{2 + \sin^2 x + 2\sin^2 x(1-\sin^2 x)} \\
 &= \frac{5}{-2\sin^4 x + 3\sin^2 x + 2} \\
 &= \frac{5}{-2\left(\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin^2 x\right) + 2} \\
 &= \frac{5}{-2\left(\sin^2 x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}}
 \end{aligned}$$

最小になるのは $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 60^\circ$$

最大になるのは $\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0^\circ$$

$0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ より、 $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ なので

最大値は $x = 0^\circ$ のとき、 $\frac{5}{2}$ 、最小値は $x = 60^\circ$ のとき $\frac{8}{5}$