2013 年 理系 第 7 問

数理 石井K

$\boxed{7}$ $a>0$ とする．曲線 $C: y=a\sqrt{x}-\log x$ $(x>0)$ が x 軸に接するとするとき，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 $x=1$ および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $y' = a\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{a\sqrt{x}-2}{2x}$

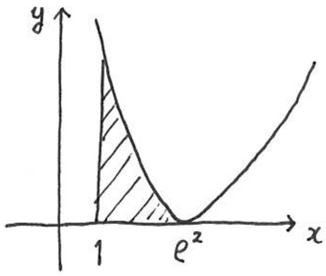
x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{a^2}$	$\cdots$	$(+\infty)$
y'		$-$	0	$+$	
y	$(+\infty)$	$\searrow$		$\nearrow$	

$\therefore$ $y'=0$ となるのは $x=\frac{4}{a^2}$ のとき

$x=\frac{4}{a^2}$ のとき $y = 2-2\log\frac{2}{a}$

$\therefore$ x 軸 に接するのは，$2=2\log\frac{2}{a} \iff \underline{a=\frac{2}{e}}$ //

(2) $S=\int_1^{e^2} a\sqrt{x}-\log x \, dx$



$= \left[a\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2}(x)'\log x\,dx$

$= \frac{2a}{3}\cdot e^3 - \frac{2}{3}a - \left[x\log x\right]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} dx$

$= \frac{2ae^3}{3} - \frac{2a}{3} - 2e^2 + e^2 - 1$

$\left(a=\frac{2}{e}\text{ を代入すると}\right)$

$= \frac{2e^3}{3}\cdot\frac{2}{e} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{e} - e^2 - 1$

$= \frac{4}{3}e^2 - \frac{4}{3e} - e^2 - 1$

$= \underline{\frac{e^2}{3} - \frac{4}{3e} - 1}$ //