

2015年理系第3問



3 空間の3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ の定める平面を α とし, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおく. α 上の点 C があり, その x 座標が正であるとする. ベクトル \vec{OC} が \vec{a} に垂直で, 大きさが1であるとする. $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく.

- (1) C の座標を求めよ.
 (2) $\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$ をみたす実数 s, t を求めよ.
 (3) α 上にない点 $P(x, y, z)$ から α に垂線を下ろし, α との交点を H とする. $\vec{OH} = k\vec{a} + l\vec{c}$ をみたす実数 k, l を x, y, z で表せ.

(1) C は α 上にあるので, $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ と表せる

$$\therefore \vec{OC} = (m-n, m+n, m+n)$$

$$\vec{OC} \perp \vec{a} \text{ より } \vec{OC} \cdot \vec{a} = m-n+m+n+m+n = 3m+n = 0$$

$$\therefore n = -3m \text{ より } \vec{OC} = (4m, -2m, -2m)$$

$$|\vec{OC}| = 1 \text{ より, } (4m)^2 + (-2m)^2 + (-2m)^2 = 1 \quad \therefore 24m^2 = 1$$

$$m > 0 \text{ より } m = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \therefore C \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

(2) (1) より

$$\vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c} \iff (-1, 1, 1) = \left(s + \frac{\sqrt{6}}{3}t, s - \frac{\sqrt{6}}{6}t, s - \frac{\sqrt{6}}{6}t \right)$$

$$\iff \begin{cases} s + \frac{\sqrt{6}}{3}t = -1 \\ s - \frac{\sqrt{6}}{6}t = 1 \end{cases}$$

$$\iff s = \frac{1}{3}, t = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(3) $\vec{OH} = k\vec{a} + l\vec{c}$ より, $\vec{PH} = k\vec{a} + l\vec{c} - \vec{OP}$ ($|\vec{a}|^2 = 3, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ が成り立つ)

$$\vec{PH} \perp \vec{a} \text{ より, } \vec{PH} \cdot \vec{a} = k \cdot 3 + l \cdot 0 - \vec{OP} \cdot \vec{a} = 0 \quad \therefore x + y + z = 3k \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{PH} \perp \vec{b} \text{ より, } \vec{PH} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + l \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{OP} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore -x + y + z = k - \frac{2\sqrt{6}}{3}l \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } k = \frac{1}{3}(x + y + z) \quad \textcircled{2} \text{ に代 } \lambda \text{ して, } l = \frac{\sqrt{6}}{6}(2x - y - z)$$