

2015年 情報科・工 第2問


 数理
石井K

2 円 $x^2 + y^2 - 6x + ay + 4 = 0$ 上の点 $A(5, 1)$ における接線を l とする。原点 O からこの円に引いた2本の接線のうち、傾きが正であるものの方程式を $y = mx$ 、接点を B とする。また、この円の中心を C とする。

- (1) $a = \overset{0}{\text{ア}}$ である。
 (2) C の座標は $(\overset{3}{\text{イ}}, \overset{0}{\text{ウ}})$ である。
 (3) 接線 l の傾きは $\overset{-2}{\text{エオ}}$ である。
 (4) $\triangle OBC$ の面積は $\sqrt{\overset{5}{\text{カ}}}$ である。
 (5) $m = \frac{\sqrt{\overset{5}{\text{キ}}}}{\overset{2}{\text{ク}}}$ である。

(1) 点 A が円上にあることより、 $5^2 + 1^2 - 6 \cdot 5 + a \cdot 1 + 4 = 0 \quad \therefore a = 0$ //

(2) 円の式は、 $(x-3)^2 + y^2 = 5$ となるから 中心は $C(3, 0)$ //

(3) $(x-3)^2 + y^2 = 5$ 上の点 $A(5, 1)$ における接線 l は

$$l: (5-3)(x-3) + 1 \cdot y = 5 \quad \text{よって } l: y = -2x + 11 \quad \therefore \text{傾きは } -2 //$$

(4) 接点を $B(a, b)$ とすると、 B は円上の点より

$$a^2 + b^2 - 6a + 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ

このとき、接線は、 $(a-3)(x-3) + by = 5 \quad \dots \textcircled{2}$

これが原点を通るので、 $-3(a-3) = 5 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$

$\textcircled{1}$ に代入して b を求めると、 $b = \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$ 傾きが正になるのは $(a, b) = (\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3})$

$$\therefore B(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}) \text{ となり、} \triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5} //$$

(5) (4) の a, b を用いて、

$$m = \frac{b}{a} \text{ と表せるので、} m = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} //$$