0002113636887999

鹿児島大学

2015年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 0でない実数 a, b, c, d が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく．ただし，$m \geqq 0$, $n \geqq 0$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(i) S と T を m と n を用いて表せ．

(ii) $S \geqq 0$, $T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるような m と n を求めよ．

(1) $3^a = 105^d$ より，$a = \log_3 105^d$ すなわち，$a = d \log_3 105$

他も同様にして，$b = d \log_5 105$，$c = d \log_7 105$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d \log_3 105} + \frac{1}{d \log_5 105} + \frac{1}{d \log_7 105}$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{\log 3}{\log 105} + \frac{\log 5}{\log 105} + \frac{\log 7}{\log 105} \right)$$ ← 底の変換公式を使った

$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{\log 3 \cdot 5 \cdot 7}{\log 105}$$

$$= \frac{1}{d}$$ ▨

(2)(i)

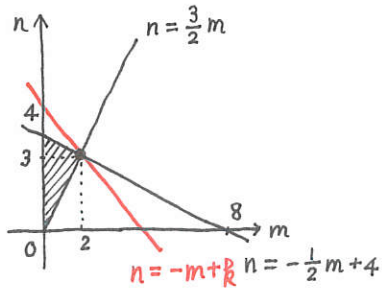
$$S = \int_0^2 -3mx + 2n\,dx = \left[-\frac{3}{2}mx^2 + 2nx \right]_0^2 = \underline{-6m + 4n}$$ //

$$T = \int_0^2 6x^2 - 2nx - m\,dx = \left[2x^3 - nx^2 - mx \right]_0^2 = \underline{-2m - 4n + 16}$$ //

(ii) $S \geqq 0$ より，$n \geqq \frac{3}{2}m$，$T \geqq 0$ より $n \leqq -\frac{1}{2}m + 4$

よって，$m \geqq 0$, $n \geqq 0$ とこれらの式が表すのは，右図の斜線部分

ただし，境界線も含む



$m + n = k$ とおくと，$n = -m + k$

$\therefore$ k が最大となるのは，$(2, 3)$ を通るときであり，そのとき，

$k = 2 + 3 = 5$ またこのとき，$\underline{m = 2, n = 3}$ //