



2014年 総合理工（数理・情報システム）第1問

1 3つの箱 X, Y, Z と3つの玉 a, b, c があり、1つの箱には1つの玉が入るとする。箱 X には a が、箱 Y には b が、箱 Z には c が入っている状態から始めて、次の操作を繰り返し行う。

「数字 $1, 2, 3, 4, 5$ の中から無作為に1つの数字 m を選ぶ。 $m = 1$ ならば、箱 Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, Y に移す。 $m = 2$ ならば、箱 X, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X に移す。 $m = 3$ ならば、箱 X, Y にある玉をそれぞれ箱 Y, X に移す。 $m = 4$ ならば、箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Y, Z, X に移す。 $m = 5$ ならば、箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X, Y に移す。」

この操作を n 回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を p_n とする。箱 X, Y, Z にそれぞれ玉 x, y, z が入っている状態を (x, y, z) と表す。たとえば、最初の状態は (a, b, c) である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ、 p_1, p_2 を求めよ。
- (2) n 回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態 (a, b, c) となっていない確率を q_n とする。 $n \geq 1$ のとき、 $p_{n+1} = \frac{1}{5}q_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) p_n を求めよ。