



2013年文系第2問

 数理
石井K

2 2つの放物線

$$C_1: y = x^2$$

$$C_2: y = x^2 - 4x + 8$$

がある。また、直線 l が C_1 と C_2 の両方に接している。

- (1) l の方程式を求めなさい。
 (2) l , C_1 , C_2 で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(1) l は y 軸に平行でないから $y = ax + b$ と表せる。

このとき、 $x^2 - (ax + b) = 0$ と $x^2 - 4x + 8 - (ax + b) = 0$ がともに重解をもてばよい。それぞれの判別式を D_1, D_2 とおくと

$$D_1 = a^2 + 4b = 0 \quad \text{かつ} \quad D_2 = (-4 - a)^2 - 4(8 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4b = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad a^2 + 8a + 4b - 16 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ に } \textcircled{1} \text{ を代入して, } a = 2 \quad \text{かつ} \quad b = -1 \quad \therefore \underline{\underline{l: y = 2x - 1}}$$

(2) (1) より、 $x^2 - (ax + b) = (x - 1)^2 \quad \therefore C_1$ と l の交点は $(1, 1)$

$x^2 - 4x + 8 - (ax + b) = (x - 3)^2 \quad \therefore C_2$ と l の交点は $(3, 5)$

$$\therefore S = \int_1^2 x^2 - (2x - 1) dx + \int_2^3 x^2 - 4x + 8 - (2x - 1) dx$$

$$= \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{(x-3)^3}{3} \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

