岡山大学

2015年 理系 第3問

3 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える．

(1) 曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ．ただし，$a_n>0$ とする．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする．また，(1) で求めた a_n に対して，$0 \leqq x \leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$，x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする．B_n および C_n を n の式で表せ．

(3) (2) で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい．