0001838721618999

東京海洋大学

2014年 海洋工 第4問

$\boxed{4}$ 座標平面上の放物線 $C : y = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ を考える．a が実数の範囲を動くとき，以下の問いに答えよ．

(1) C と放物線 $y = x^2 + \dfrac{1}{2}$ との2つの共有点を結んだ線分の中点（共有点が1つの場合にはその点自身とする）が描く軌跡の長さを求めよ．

(2) $y \geqq x^2 + \dfrac{1}{2}$ の表す領域のうちで C が通過する部分の面積を求めよ．

(1) $C' : y = x^2 + \frac{1}{2}$ とおくと．

C と C' が共有点をもつことより．$x^2 + \frac{1}{2} - (-x^2 + 2ax - a^2 + a + 1) = 0$

すなわち．$2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{1}{2} = 0 \cdots (*)$ が実数解をもつ

$(*)$ の判別式を D とおくと．$D/4 = a^2 - 2(a^2 - a - \frac{1}{2}) \geqq 0$

$\therefore a^2 - 2a - 1 \leqq 0 \quad \therefore 1 - \sqrt{2} \leqq a \leqq 1 + \sqrt{2} \cdots ①$

また，$(*)$ において解と係数の関係より．$\alpha + \beta = a$，$\alpha\beta = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \cdots ②$

このとき．共有点は $(\alpha, \alpha^2 + \frac{1}{2})$，$(\beta, \beta^2 + \frac{1}{2})$ と表されるので

中点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 1}{2}\right)$ となる．

よって ② より 中点を (X, Y) とおくと．$(X, Y) = \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\right)$

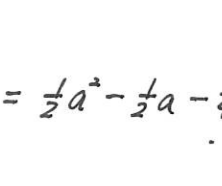
これと ① より．軌跡は．$y = x + \frac{3}{4} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

直線の一部で，

$\therefore$ 軌跡の長さは．$\sqrt{2} \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{2}$ //

(2) C の式を a についての方程式とみると．

$a^2 - (2x+1)a + x^2 + y - 1 = 0$ 　a が実数であるから



$D = (2x+1)^2 - 4(x^2 + y - 1) \geqq 0 \quad \therefore y \leqq x + \frac{5}{4}$

$y = x^2 + \frac{1}{2}$ と $y = x + \frac{5}{4}$ の共有点は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$，$\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$ より

$S = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} -\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \underline{\frac{4}{3}}$ //