2015年 理工学部 第3問

$\boxed{3}$ $0<\theta_n<1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる数列 $\{\theta_n\}$ を用いて，閉区間 $[0,\ 1]$ から始めて，以下のようにしていくつかの閉区間を残す操作を繰り返す．ただし，$a<b$ とするとき，開区間 $(a,\ b)$ の長さは閉区間 $[a,\ b]$ の長さと等しく $b-a$ である．

1回目の操作では，閉区間 $\left[0,\ \dfrac{1-\theta_1}{2}\right]$ と $\left[\dfrac{1+\theta_1}{2},\ 1\right]$ を残す．残った閉区間の個数を k_1，各閉区間の長さを r_1 とおき，s_1 を $s_1=k_1r_1$ と定める．$k_1=2$，$r_1=\dfrac{1-\theta_1}{2}$，$s_1=1-\theta_1$ である．

$n+1$ 回目の操作では，n 回目の操作を終えて残った k_n 個の長さ r_n の各閉区間から長さ $\theta_{n+1}r_n$ の開区間を取り除き，長さの等しい閉区間を2個ずつ残す．こうして残った閉区間の個数を k_{n+1}，各閉区間の長さを r_{n+1} とおき，s_{n+1} を $s_{n+1}=k_{n+1}r_{n+1}$ と定める．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n=$ $\boxed{\text{サ}}$ である．

(2) $\theta_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n=$ $\boxed{\text{シ}}$ である．

(3) $0<\theta<1$ とし，$\theta_n=\theta$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，閉区間 $[0,\ 1]$ を定義域とする連続関数 $f_n(x)$ と実数 a_n が次の条件を満たすとする．

条件：$f_n(0)=0$ で $f_n(1)=1$ である．関数 $f_n(x)$ は，n 回目までの操作で取り除いた各開区間において微分可能で $f_n{}'(x)=0$ となり，n 回目の操作を終えて残った各閉区間から両端を除いた開区間において微分可能で $f_n{}'(x)=a_n$ となる．

このとき a_n を θ と n を用いて表すと $a_n=$ $\boxed{\text{ス}}$ となる．関数 $y=f_n(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のグラフは折れ線になり，その長さを l_n とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} l_n=$ $\boxed{\text{セ}}$ となる．