

2013年理系2第1問

 1 関数 $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3}{2}$ ($1 \leq x \leq 3$) を考える.
(1) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x) = \frac{\text{ア}}{1} + \sqrt{\frac{\text{イ}}{4}x - \frac{\text{ウ}}{6}} \quad \left(\frac{\frac{\text{エ}}{\text{オ}}}{2} \leq x \leq \frac{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}}{2} \right)$$

である.

(2) 不等式 $x < f^{-1}(x)$ を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\text{ク}}{3} - \sqrt{\frac{\text{ケ}}{2}} < x \leq \frac{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}{2} \quad \frac{5}{2}$$

である.

$$(1) y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3}{2} \quad (1 \leq x \leq 3) \text{ より,}$$

$$x = \frac{1}{4}(y-1)^2 + \frac{3}{2} \quad (1 \leq y \leq 3)$$

$$\therefore \text{定義域は, } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{このとき, } 4x-6 = (y-1)^2$$

$$y \geq 1 \text{ より, } y-1 = \sqrt{4x-6}$$

$$\therefore y = 1 + \sqrt{4x-6}$$

$$\text{以上より, } \underline{f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4x-6} \quad \left(\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right)}$$

$$(2) x < 1 + \sqrt{4x-6} \quad \left(\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right) \Leftrightarrow x-1 < \sqrt{4x-6} \quad \left(\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right)$$

両辺 0 以上なので 2 乗して,

$$x^2 - 2x + 1 < 4x - 6$$

$$x^2 - 6x + 7 < 0 \quad \therefore 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \text{ より, } \underline{3 - \sqrt{2} < x \leq \frac{5}{2}}$$