

2012年 国際文理 (国際教養) 第2問

 数理  
石井K

2 放物線  $y = x^2$  の2つの接線が直交しており、接点を  $P, Q$  としその  $x$  座標をそれぞれ  $s, t$  とする。次の問に答えなさい。

- (1)  $s$  と  $t$  の関係式を求めなさい。  
 (2) 2点  $P, Q$  を結ぶ線分は、接線のとり方に関係なく常に  $y$  軸上のある定点を通ることを示しなさい。

(1)  $y' = 2x$  より、2つの接線は  $y = 2s(x-s) + s^2$  と  $y = 2t(x-t) + t^2$

すなわち、 $y = 2sx - s^2$  と  $y = 2tx - t^2$

これらが直交することより、 $2s \cdot 2t = -1 \quad \therefore st = -\frac{1}{4}$ 、

(2)  $P(s, s^2)$  と  $Q(t, t^2)$  を直線は、 $y = \frac{s^2 - t^2}{s - t} (x - s) + s^2$

$\therefore y = (s+t)x - st \quad \dots (*)$

また、(1)より  $s$  と  $t$  は異符号であるから線分  $PQ$  は  $y$  軸と交わる

(\*) と (1) より、その交点は  $(0, \frac{1}{4})$  となる  $\square$