



2016年工学部第2問

2 四面体  $OABC$  において、辺  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  のどの2辺も互いに直交し、長さがすべて1である。3点  $O$ ,  $B$ ,  $C$  を通る平面上に点  $D$  を

$$OD = 1, \quad 0^\circ < \angle BOD < 90^\circ, \quad 0^\circ < \angle COD < 90^\circ$$

となるようにとり、 $\angle BOD = \theta$ ,  $\cos \theta = x$  とおく。線分  $AB$  を  $(x+2):x$  に外分する点を  $E$ , 線分  $AC$  を  $x:(1-x)$  に内分する点を  $F$ , 三角形  $DEF$  の重心を  $G$  とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OD}$  を,  $x$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。また,  $\vec{OG}$  を,  $x$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2) 点  $G$  が3点  $O$ ,  $B$ ,  $C$  を通る平面上にあるような  $x$  の値を求めよ。
- (3)  $\vec{OG}$  と  $\vec{DF}$  の内積の最小値と, そのときの  $x$  の値を求めよ。