

2014年薬学部(前期)第4問

 数理
 5#K

4 次の問いに答えなさい。

- (1) 1次関数 $f(x)$ のグラフは点 $(2, 0)$ を通る。また $f(x)$ は $f(x) = 2x + \int_0^k f(t) dt$ をみたす。このとき、 k の値を求めなさい。
- (2) $a > 0$ とする。 $\int_0^a f(x) dx = 0$ となるとき、 a の値を求めなさい。
- (3) $b > 0$ とする。 $3 \int_0^b |f(x)| dx = 5 \int_0^b f(x) dx$ が成り立つとき、 b の値を求めなさい。

(1) $f(x) = 2x + c$ (c : 定数) と表せるので ($c = \int_0^k f(t) dt$ とおいた)

$$\begin{aligned} c &= \int_0^k 2t + c dt \\ &= [t^2 + ct]_0^k \\ &= k^2 + ck \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = 2x + c$ のグラフが $(2, 0)$ を通ることより、 $0 = 4 + c \quad \therefore c = -4$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して、} -4 = k^2 - 4k$$

$$\therefore (k-2)^2 = 0 \quad \therefore \underline{k=2} \text{ ,, また、このとき、} f(x) = 2x - 4$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a 2x - 4 dx \\ &= [x^2 - 4x]_0^a \\ &= a^2 - 4a \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 - 4a = 0$$

$$a(a-4) = 0 \quad a > 0 \text{ より、} \underline{a=4} \text{ ,,}$$

(3) $0 \leq x \leq 2$ において、 $f(x) \leq 0$ 、 $x \geq 2$ において $f(x) \geq 0$ であるから

(i) $b \leq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} (\text{等式}) \Leftrightarrow 3 \int_0^b -f(x) dx &= 5 \int_0^b f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^b f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (2) \text{ より、} b = 4 \quad \underline{b \leq 2 \text{ をみたさず不適}}$$

(ii) $b > 2$ のとき、

$$\begin{aligned} (\text{等式}) \Leftrightarrow 3 \int_0^2 -f(x) dx + 3 \int_2^b f(x) dx &= 5 \int_0^b f(x) dx \\ \Leftrightarrow 3 [-x^2 + 4x]_0^2 + 3 [x^2 - 4x]_2^b &= 5 [x^2 - 4x]_0^b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-6)(b+2) = 0$$

$$\therefore b > 0 \text{ より } b = 6$$

$$(i), (ii) \text{ より、} \underline{b=6} \text{ ,,}$$