

2014年理系第3問

3 逆行列をもつ2次の正方行列, A_1, A_2, A_3, \dots が, 関係式

$$A_{n+1}A_n = A_n + 2E \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする. さらに $A_1 + E$ は逆行列をもつとする. ここで E は2次の単位行列とする.

(1) すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもち,

$$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2} A_n (A_n + E)^{-1}$$

が成立することを示せ.

(2) $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ により, 行列 B_n を定める. B_{n+1} と B_n との間に成立する関係式を求め, B_n を B_1 と n を用いて表せ.