

2014年歯・薬学部(前期)第4問



4 放物線  $y = x^2 - x - 2$  と直線  $y = ax$  に囲まれた図形の面積の最小値を求めなさい。

$$x^2 - x - 2 - ax = 0$$

$$x^2 - (a+1)x - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{判別式を } D \text{ とおくと, } D &= (a+1)^2 + 4 \cdot 2 \\ &= (a+1)^2 + 8 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  放物線と直線は異なる2つの共有点をもつ

そのx座標を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とおくと

$\textcircled{1}$  において、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = a + 1, \quad \alpha\beta = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - 4 \cdot (-2) \\ &= a^2 + 2a + 9 \end{aligned}$$

$$\beta - \alpha > 0 \text{ なので, } \beta - \alpha = \sqrt{a^2 + 2a + 9}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} ax - (x^2 - x - 2) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\} \frac{1}{6} \text{ 公式} \\ &= \frac{1}{6} (a^2 + 2a + 9)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \{(a+1)^2 + 8\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{最小値は } \underline{\underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}} \quad (a = -1 \text{ のとき})$$

