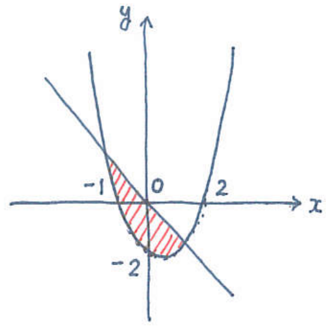
2014 年 歯・薬学部（前期）第 4 問

$\boxed{4}$ 放物線 $y = x^2 - x - 2$ と直線 $y = ax$ に囲まれた図形の面積の最小値を求めなさい．



$x^2 - x - 2 - ax = 0$

$x^2 - (a+1)x - 2 = 0$ $\cdots$ ①

判別式を D とおくと，$D = (a+1)^2 + 4 \cdot 2$

$= (a+1)^2 + 8$

> 0

∴ 放物線と直線は異なる2つの共有点をもつ

その x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと

① において，解と係数の関係より，

$\alpha + \beta = a + 1$，$\alpha\beta = -2$

$\therefore (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= (a+1)^2 - 4 \cdot (-2)$

$= a^2 + 2a + 9$

$\beta - \alpha > 0$ なので，$\beta - \alpha = \sqrt{a^2 + 2a + 9}$

$S = \int_\alpha^\beta ax - (x^2 - x - 2)\, dx$

$= -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\, dx$ $\frac{1}{6}$ 公式

$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

$= \frac{1}{6}(a^2 + 2a + 9)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{6}\left\{(a+1)^2 + 8\right\}^{\frac{3}{2}}$

∴ 最小値は，$\underline{\frac{8\sqrt{2}}{3} \ (a = -1 \text{ のとき})}$ //