宇都宮大学

2012 年 第 6 問

$\boxed{6}$ 関数 $y=e^{-x}$ のグラフを C とする．C 上の点 P$(t,\ e^{-t})$ における接線と x 軸との交点を Q$(u,\ 0)$ とする．C 上の点 $(u,\ e^{-u})$ を R とするとき，次の問いに答えよ．

(1) u を t の式で表せ．

(2) 線分 PQ，線分 QR と C で囲まれた部分を図形 A とする．図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を t の式で表せ．

(3) (1) の u を t の関数とみて $u(t)$ と表す．数列 $\{t_n\}$ を $t_1=0$，$t_{n+1}=u(t_n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ と定義するとき，一般項 t_n を求めよ．

(4) (2) の V を t の関数とみて $V(t)$ と表し，(3) の t_n を用いて $V_n=V(t_n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．数列 $\{V_n\}$ は等比数列であることを示し，無限等比級数

$$V_1+V_2+\cdots+V_n+\cdots$$

の収束，発散を調べ，収束する場合は，その和を求めよ．