北海道大学

2016年 理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 複素数平面上の点0を中心とする半径2の円C上に点zがある．aを実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1) $|w|^2$をzの実部xとaを用いて表せ．

(2) 点zがC上を一周するとき，$|w|$の最小値をaを用いて表せ．

(1) $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$

$= (z^2 - 2az + 1)(\overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1)$

$= z^2\overline{z}^2 - 2az^2\overline{z} + z^2 - 2az\overline{z}^2 + 4a^2 z\overline{z} - 2az + \overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1$

$= |z|^4 - 2az|z|^2 + z^2 - 2a\overline{z}|z|^2 + 4a^2|z|^2 - 2az + \overline{z}^2 - 2a\overline{z} + 1$

$|z| = 2$ であるから，

$|w|^2 = 16 - 10a(z + \overline{z}) + 16a^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1$

ここで，$z + \overline{z} = 2x$，$z^2 + \overline{z}^2 = (z + \overline{z})^2 - 2|z|^2 = 4x^2 - 8$ より，

$|w|^2 = 17 - 10a \cdot 2x + 16a^2 + 4x^2 - 8$

$= \underline{4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9}$ //

(2) $|w|^2 = 4\left(x - \frac{5}{2}a\right)^2 - 9a^2 + 9$

$-2 \leqq x \leqq 2$ であるから

(i) $-2 \leqq \frac{5}{2}a \leqq 2$ すなわち，$-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5}$ のとき

$|w|$の最小値は，$\sqrt{-9a^2+9} = 3\sqrt{1-a^2}$

(ii) $\frac{5}{2}a > 2$ すなわち，$a > \frac{4}{5}$ のとき．

$|w|$は$x = 2$のとき．最小値 $\sqrt{(4a-5)^2} = |4a-5|$ をとる．

(iii) $\frac{5}{2}a < -2$ すなわち，$a < -\frac{4}{5}$ のとき．

$|w|$は$x = -2$のとき．最小値 $\sqrt{(4a+5)^2} = |4a+5|$ をとる

(i)～(iii)より，$|w|$の最小値は

$$\begin{cases} |4a+5| & \left(a < -\frac{4}{5} \text{のとき}\right) \\ 3\sqrt{1-a^2} & \left(-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5} \text{のとき}\right) \\ |4a-5| & \left(a > \frac{4}{5} \text{のとき}\right) \end{cases}$$ //