一橋大学

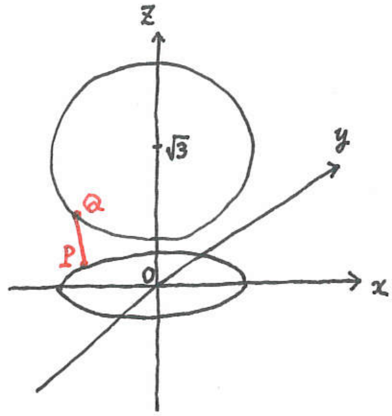
2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径1の円周上を点Pが動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径1の円周上を点Qが動く．

(1) 線分PQの長さの最小値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ．

(2) 線分PQの長さの最大値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ．



(1) $P(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$Q(\cos\varphi,\ 0,\ \sqrt{3}+\sin\varphi)$

$(0 \leqq \theta, \varphi < 2\pi)$ とおくことができるので

$$PQ^2 = (\cos\theta - \cos\varphi)^2 + \sin^2\theta + (\sqrt{3}+\sin\varphi)^2$$
$$= 5 - 2\cos\theta\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi$$

θ を固定して（定数とみて），φ に関して三角関数の合成をして

$$PQ^2 = 5 + 2\sqrt{3+\cos^2\theta}\cdot\sin(\varphi-\alpha) \quad \cdots(*)$$

$\left(\text{ただし}\alpha\text{は実数で } \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\cos^2\theta}},\ \sin\alpha = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3+\cos^2\theta}} \text{ をみたす}\right)$

∴ PQ が最小となるのは，$\sin(\varphi-\alpha) = -1$ のとき．

このとき $PQ^2 = 5 - 2\sqrt{3+\cos^2\theta}$ より，PQ が最小となるのは，$\theta = 0,\ \pi$ のとき．

(i) $\theta = 0$ のとき．

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$　∴ $\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ より，$\varphi = \dfrac{5}{3}\pi$

以上より，$P(1, 0, 0)$，$Q\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，最小値 $PQ = 1$ をとる //

(ii) $\theta = \pi$ のとき．

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$ より，$\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$　∴ $\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ より，$\varphi = \dfrac{4}{3}\pi$

以上より，$P(-1, 0, 0)$，$Q\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，最小値 $PQ = 1$ をとる //

(2) (1)と同様に，(*)式より，PQ が最大となるのは，$\sin(\varphi-\alpha) = 1$ のとき．

このとき，$PQ^2 = 5 + 2\sqrt{3+\cos^2\theta}$ より，PQ が最大となるのは $\theta = 0,\ \pi$ のとき．

(i) $\theta = 0$ のとき，(1)の(i)より，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$，$\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ より，$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$

∴ $P(1, 0, 0)$，$Q\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，最大値 $PQ = 3$ をとる //

(ii) $\theta = \pi$ のとき，$\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$，$\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ より，$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

∴ $P(-1, 0, 0)$，$Q\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，最大値 $PQ = 3$ をとる //