山口大学

2010 年 理（数理科学）・医 第 2 問

$\boxed{2}$ 次の初項と漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = e^{-a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ここで，e は自然対数の底で，$1 < e < 3$ である．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) すべての自然数 n について $\frac{1}{3} < a_n < 1$ が成り立つことを示しなさい．

(2) 方程式 $x = e^{-x}$ はただ 1 つの実数解をもつことと，その解は $\frac{1}{3}$ と 1 の間にあることを示しなさい．

(3) 関数 $f(x) = e^{-x}$ に平均値の定理を用いることによって，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$\frac{1}{3}$ と 1 との間の任意の実数 x_1，x_2について，

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq e^{-\frac{1}{3}}|x_2 - x_1|$$

(4) 数列 $\{a_n\}$ は，方程式 $x = e^{-x}$ の実数解に収束することを示しなさい．