

2016年教育第3問

3 座標平面上の動点 $P_t(x, y)$ の座標が, t の関数

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t$$

で与えられている. また O を原点とする. 実数 a, b で $0 < b - a < 2\pi$ であるものに対して, 線分 OP_a と, 動点 P_t が $t = a$ から $t = b$ まで動くときに描く曲線と, 線分 OP_b とによって囲まれる部分の面積を $S(a, b)$ とおく. 次の問に答えよ.

- (1) $f(t) = S(0, t)$ とする. 導関数 $\frac{d}{dt} f(t)$ を求めよ.
- (2) 自然数 n に対して, $U(n) = S\left(\frac{n-1}{2}\pi, \frac{n}{2}\pi\right)$ とおく. $U(n)$ を求めよ.
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} U(n)$ の和を求めよ.