0001353456468999

鹿児島大学

2013年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の(i), (ii)に答えよ．

(i) m, nが自然数ならば，$\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$である．このことを証明せよ．

(ii) p, qが自然数ならば，$\sqrt{2}$は$\dfrac{p}{q}$と$\dfrac{2q}{p}$の間にある．すなわち，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$または$\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$が成り立つ．このことを証明せよ．

(2) 定数aは実数で，$a > 0$, $a \neq 1$とする．このとき，すべての正の実数x, yに対して$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$が成り立つ．このことを証明せよ．

(1)(i) 背理法により証明する．

$\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$ が成り立つような，自然数 m, n が存在したと仮定する．

このとき，$m^2 = 2n^2$ となり，左辺は2で偶数回割り切れるが右辺は2で奇数回割り切れる．

0回のときも含む

(1)(i) は他の証明法もある

(参考) $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明．

(教科書など)

よって，等号が成り立つことに矛盾する． $\therefore \dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$ となる ▨

すべての自然数 m, n に対して．

(ii). $\left(\sqrt{2}-\dfrac{p}{q}\right)\left(\sqrt{2}-\dfrac{2q}{p}\right) = \dfrac{\sqrt{2}q-p}{q} \cdot \dfrac{\sqrt{2}p-2q}{p}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}q-p)^2}{pq} \cdot (-\sqrt{2})$

< 0 （$\because$ (1)より，$\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}q - p \neq 0$ であるから）．

したがって，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2p}{p}$ の間にある ▨

(2) $\log_a x^{\log_a y} = (\log_a y)(\log_a x)$, $\log_a y^{\log_a x} = (\log_a x)(\log_a y)$

よって，$\log_a x^{\log_a y} = \log_a y^{\log_a x}$

A=Bを示したい！

⇩

$\log A = \log B$ を示せればよい

すなわち，$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ ▨

なぜなら，$y = \log_a x$ のグラフは，

単調増加 or 単調減少 であるから．