



2015年理工第2問

 数理
石井

2 3点 $A(1, 4)$, $B(-1, 0)$, $C(-2, 7)$ を通る 2次関数 $y = f(x)$ 上に点 $P(p, f(p))$ がある。ただし、 $-2 < p \leq -1$ とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ を求めなさい。
 (2) 三角形 ACP の面積を p の式で表しなさい。
 (3) 三角形 ACP の面積が最大となる点 P の座標を求めなさい。

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと、

$$A(1, 4) \text{ を通ることより, } 4 = a + b + c \cdots \textcircled{1}$$

$$B(-1, 0) \text{ を通ることより, } 0 = a - b + c \cdots \textcircled{2}$$

$$C(-2, 7) \text{ を通ることより, } 7 = 4a - 2b + c \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 4 = 2b \quad \therefore b = 2$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して, } a + c = 2 \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{3} \text{ に代入して, } 4a + c = 11 \cdots \textcircled{3}'$$

$$\textcircled{3}' - \textcircled{1}' \text{ より, } 3a = 9 \quad \therefore a = 3, c = -1$$

$$\text{以上より, } \underline{f(x) = 3x^2 + 2x - 1} //$$

(2) 直線 $AC: y = \frac{4-7}{1-(-2)}(x-1) + 4$

$$\therefore AC: x + y - 5 = 0$$

\therefore 点 P と直線 AC とのキヨリ h は、

$$h = \frac{|P + f(P) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3|P^2 + P - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot |(P+2)(P-1)|$$

$$\text{いま, } -2 < P \leq -1 \text{ より, } (P+2)(P-1) < 0 \text{ より, } h = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot (-P^2 - P + 2)$$

$$\text{また, } AC = \sqrt{(1+2)^2 + (4-7)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ACP \text{ の面積を } S(P) \text{ とおくと, } S(P) = \frac{1}{2} AC \cdot h = \underline{-\frac{9}{2}P^2 - \frac{9}{2}P + 9} //$$

(3) $S(P) = -\frac{9}{2}(P + \frac{1}{2})^2 + \frac{81}{8}$

$$-2 < P \leq -1 \text{ より,}$$

$$\triangle ACP \text{ の面積が最大となるのは, } P = -1 \text{ すなわち } \underline{P(-1, 0)} //$$

