0002123906787999

筑波大学

2015年第5問

数理 石井K

5 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$$
$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$h(x)=\sin x$$

とおく．3つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ の $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1, C_2, C_3 とする．

(1) C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ．

(2) C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする．$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ の値を求めよ．

(3) C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=0 \iff -\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=0$

$\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

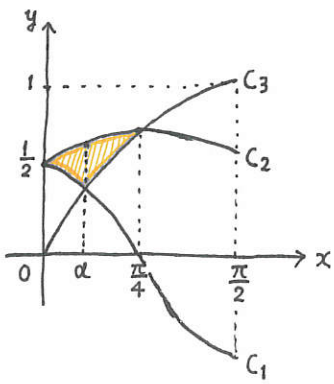
$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{4}$ $\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 交点は $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ //

(2) $\frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sin\alpha \iff \cos\alpha=3\sin\alpha$

両辺を2乗して．$\cos^2\alpha=9\sin^2\alpha$

$\therefore \cos^2\alpha=9(1-\cos^2\alpha)$ より．$\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$

$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ より．$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ //



(3) 右のグラフより，求める面積をSとすると．

$S=\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\,dx$

$=\int_0^\alpha \sin x\,dx+\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\,dx$

$=\Big[-\cos x\Big]_0^\alpha+\frac{1}{2}\Big[\cos x+\sin x\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\cos\alpha+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\alpha-\sin\alpha\right)$

$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}$ //