0001976453208999

広島大学

2015年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする．ただし，p_1，q_1 は $p_1^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする．2次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n < \beta_n$ とする．$c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ．

(2) c_n を n の式で表せ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

(1) $2^{r_n} = n\sqrt{n} + \sqrt{n} = (n+1)\sqrt{n}$ ， $2^{r_{n+1}} = (n+2)\sqrt{n+1}$ より．

$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} = \underline{2^{r_{n+1}-r_n}} \,/\!/$$

(2) (1)より．

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} \qquad \therefore \frac{c_{n+1}}{2^{r_{n+1}}} = \boxed{\frac{c_n}{2^{r_n}}} = \frac{c_{n-1}}{2^{r_{n-1}}} = \cdots = \boxed{\frac{c_1}{2^{r_1}}} \quad \cdots (*)$$

ここで，$x^2 - p_1 x + q_1 = 0$ の解は $x = \dfrac{p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2}$ ，$p_1^2 - 4q_1 = 4$ より．$x = \dfrac{p_1}{2} \pm 1$

$\therefore \beta_1 - \alpha_1 = 2$ より．$c_1 = 2$ ，また，$r_1 = \log_2 2 = 1$ なので $(*)$ より．

$$c_n = \frac{2}{2^1} \times 2^{\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \underline{(n+1)\sqrt{n}} \,/\!/$$

(3)

$x^2 - p_n x + q_n = 0$ を解くと，$x = \dfrac{p_n \pm \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}$

$\therefore c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n}$

(2)の結果より．$\sqrt{p_n^2 - 4q_n} = (n+1)\sqrt{n}$

$$\therefore p_n^2 - 4q_n = (n+1)^2 \cdot n$$

$p_n = n\sqrt{n}$ を代入すると，$\underline{q_n = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}n} \,/\!/$