



2016年理系第3問

3 複素数平面上を、点 P が次のように移動する。

- (i) 時刻 0 では、 P は原点にいる。時刻 1 まで、 P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると、 $z_1 = 1$ である。
- (ii) 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 2 までその方向に速さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると、 $z_2 = \frac{3+i}{2}$ である。
- (iii) 以下同様に、時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha = \frac{1+i}{2}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) z_3, z_4 を求めよ。
- (2) z_n を α, n を用いて表せ。
- (3) P が $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \dots$ と移動するとき、 P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。 w を求めよ。
- (4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。