



2014年理系第4問

4 $\alpha > 1$ とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $a_n > 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(2) $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1)$ (ただし, $x \geq 0$ とする.)

(3) $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)