2014 年 第 2 問

$\boxed{2}$ 二つの関数 $f(x) = x\sin x$，$g(x) = \sqrt{3}x\cos x$ について次の問いに答えよ．ただし，(3) と (4) において，a および $h(x)$ は (2) で定めたものとする．

(1) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるものをすべて求めよ．

(2) (1) で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする．点 A における曲線 $y = g(x)$ の接線を $y = h(x)$ と表す．$h(x)$ を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq a$ のとき，$h(x) \geqq g(x)$ であることを示せ．

(4) $0 \leqq x \leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y = g(x)$，および直線 $y = h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f(x) - g(x) = 2x\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2x\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $f(x) = g(x)$ となるのは．$x = -\frac{2}{3}\pi,\ 0,\ \frac{\pi}{3}$　$\therefore$ $\underline{\left(-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right), (0, 0), \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)}$ //

(2) $a > 0$ より．$a = \frac{\pi}{3}$　$\therefore$ $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

$g'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}x\sin x$　$\therefore$ $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}$

$\therefore$ $h(x) = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$　$\therefore$ $\underline{h(x) = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}}$ //

(3) $h(x) - g(x) = H(x)$ とおくと．$H(x) = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} - \sqrt{3}x\cos x$

$\therefore$ $H'(x) = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2} - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}x\sin x$

$H''(x) = 2\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}x\cos x \geqq 0$

よって．$H'(x)$ は単調増加で $H'(a) = h'(a) - g'(a) = 0$ なので

$0 \leqq x \leqq a$ において $H'(x) \leqq 0$　$\therefore$ $H(x)$ は単調減少で

$H(a) = h(a) - g(a) = 0$ より　$H(x) \geqq H(a) = 0$　$\therefore$ $h(x) \geqq g(x)$ ■

(4) $S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} - \sqrt{3}x\cos x\, dx$

$= \left[\frac{\sqrt{3} - \pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\sin x)'\, dx$

$= \frac{\sqrt{3}\pi^2 + \pi^3}{36} - \sqrt{3}\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx$

$= \underline{\frac{\pi + \sqrt{3}}{36}\pi^2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ //