広島大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bを実数, $a>0$として, 行列$A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$の定める1次変換を$f$とする. fによって, 点P(1, 0)が点P_1に移され, 点P_1が点P_2に移されるものとする. Pが線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の中点であるとき, 次の問いに答えよ.

(1) a, bを求めよ.

(2) ある実数cに対して$c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(v_1,\ v_2)$とすると,

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. cを求めよ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PP}_1}=(w_1,\ w_2)$とする. すべての自然数$n$に対して

$$A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ.

(4) (2)と(3)のv_1, v_2, w_1, w_2に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(v_1,\ v_2)+t(w_1,\ w_2)$となる実数$s$, tを求め, $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$を$n$を用いて表せ. ただし, nは自然数である.

(1) $\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $P_1(a,-2)$

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4 \\ -2a-2b \end{pmatrix}$ $\therefore$ $P_2(a^2-4,-2a-2b)$

Pが線分P_1P_2の中点より.

$a^2-4+a=2$, $-2a-2b-2=0$

$\therefore$ $(a-2)(a+3)=0$, $a+b+1=0$

$a>0$より. $\underline{a=2,\ b=-3}$ //

(2) $(a+c,-2)=(v_1,v_2)$ $\therefore$ $v_1=a+c$, $v_2=-2$ $\therefore$ $(v_1,v_2)=(c+2,-2)$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c+4-4 \\ -2c-4+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c \\ -2c+2 \end{pmatrix}$ $\therefore\begin{cases} 2c=c+2 \\ -2c+2=-2 \end{cases}$ $\therefore$ $\underline{c=2}$ //

(3) $\overrightarrow{PP_1}=(a-1,-2)=(1,-2)$ $\therefore A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdots(*)$を示せばよい

(i) $n=1$のとき. $(*)$の(左辺)$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (右辺)$=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\therefore$ 成り立つ

(ii) $n=k$のとき. $(*)$が成り立つと仮定すると. $A^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}(-2)^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^k\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}=(-2)^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $n=k+1$のときも成り立つ. (i), (ii)よりすべての自然数nに対して成り立つ ■

(4) $\overrightarrow{OP}=(1,0)$より. $(1,0)=s(4,-2)+t(1,-2)$ $\therefore\begin{cases} 4s+t=1 \\ -2s-2t=0 \end{cases}$

$\therefore$ $(s,t)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

これより. $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A^n\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}A^n\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2), (3)より. $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\cdot(-2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-(-2)^n \\ -2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}}$ //