広島大学

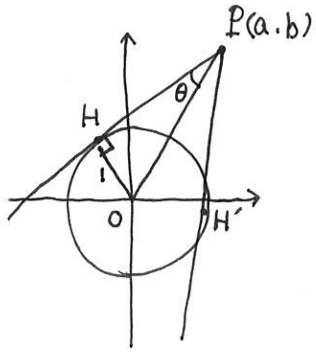
2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上で，原点Oを中心とする半径1の円をCとする．Cの外部にある点P$(a,\ b)$からCにひいた2本の接線とCとの接点をH，H′とする．∠OPH＝θとするとき，次の問いに答えよ．

(1) PHの長さ，および$\sin\theta$をa，bを用いて表せ．

(2) HH′＝OPとなるような点Pの軌跡を求めよ．



(1) $OP = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \sin\theta = \dfrac{1}{OP} = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ //

$PH = \dfrac{1}{\tan\theta} \cdots ①$

∴ ①より．$PH^2 = \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1-\frac{1}{a^2+b^2}}{\frac{1}{a^2+b^2}} = a^2+b^2-1$

$\therefore \underline{PH = \sqrt{a^2+b^2-1}}$ //

(2) 余弦定理より．

$HH'^2 = 2PH^2 - 2PH^2 \cdot \cos 2\theta$

$= 2(a^2+b^2-1) \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{a^2+b^2}$

$= \dfrac{4(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}$

$HH'^2 = OP^2$ より．$\dfrac{4(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2} = a^2+b^2$

$\therefore a^4+b^4+2a^2b^2 = 4a^2+4b^2-4$

$\therefore (a^2+b^2-2)^2 = 0$

$\therefore a^2+b^2 = 2$ 　逆にこのとき，$HH' = OP$となる．

∴ 求める軌跡は，<u>原点を中心とする半径$\sqrt{2}$の円</u> //