筑波大学

2011 年 第 3 問

$\boxed{3}$ α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．円 $C : x^2 + (y + \sin\alpha)^2 = 1$ および，その中心を通る直線 $\ell : y = (\tan\alpha)x - \sin\alpha$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ．

(2) 等式

$$2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 連立方程式

$$\begin{cases} y \leqq (\tan\alpha)x - \sin\alpha \\ x^2 + (y+\sin\alpha)^2 \leqq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする．図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．