0001817272818999

京都産業大学

2014年 理系 第2問

数理 石井K

2 以下の $\square$ にあてはまる式または数値を記入せよ．

行列 $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ の n 乗を $A^n=\begin{pmatrix}a_n&0\\b_n&c_n\end{pmatrix}$ とおく．ただし，nは自然数とする．

(1) $a_2=$ $\boxed{ア}$ 4，$b_2=$ $\boxed{イ}$ 5，$c_2=$ $\boxed{ウ}$ 9 である．

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n，c_n を用いて表すと，$a_{n+1}=$ $\boxed{エ}$ $2a_n$，$b_{n+1}=$ $\boxed{オ}$ a_n+3b_n，$c_{n+1}=$ $3c_n$ $\boxed{カ}$ である．

(3) c_n を n の式で表すと $\boxed{キ}$ 3^n である．

(4) b_n を n の式で表すと $\boxed{ク}$ である． 3^n-2^n

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n+c_n}=$ $\boxed{ケ}$ 1 である．

(注) (2)の b_{n+1} は $A^{n+1}=A^n\cdot A$ で計算すると，$b_{n+1}=2b_n+c_n$ となるがそれでも可

(1) $A^2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\5&9\end{pmatrix}$ $\therefore$ $a_2=4,\ b_2=5,\ c_2=9$ //

(2) $A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n&0\\b_n&c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_n&0\\a_n+3b_n&3c_n\end{pmatrix}$

$\therefore$ $a_{n+1}=2a_n$ //

$b_{n+1}=a_n+3b_n$ //

$c_{n+1}=3c_n$ //

(3) c_n は初項3，公比3の等比数列なので

$c_n=3^n$ //

(4) (3)と同様に考えて，$a_n=2^n$ $\therefore b_{n+1}=2^n+3b_n$

両辺を 3^{n+1} で割ると，$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2^n}{3^{n+1}}+\dfrac{b_n}{3^n}$

$\therefore$ $d_n=\dfrac{b_n}{3^n}$ とおくと，$d_{n+1}=\dfrac{2^n}{3^{n+1}}+d_n$

$\therefore$ $d_{n+1}-d_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ より，$n\geqq 2$ に対して，$d_n=d_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$

$d_1=\dfrac{1}{3}$ より，$d_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$ $(n\geqq 2)$

$\therefore$ $d_n=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ より，$b_n=3^n-2^n$ // これは$n=1$の場合も成立

(5) $(与式)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=1$ //