2015年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$-x^2 - x \leqq \log(1-x) \leqq -x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次によって定める．

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(1 - \frac{1}{2\cdot1^2}\right) \\ a_2 &= \left(1 - \frac{1}{2\cdot2^2}\right)\left(1 - \frac{2}{2\cdot2^2}\right) \\ &\vdots \\ a_n &= \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)\left(1 - \frac{2}{2n^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{2n^2}\right) \end{aligned}$$

このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $f(x) = \log(1-x) - (-x^2 - x)$ とおくと，

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} + 2x + 1 = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ となるので，

$f(x)$ は単調増加で，$f(x) \geqq f(0) = 0$

したがって，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において，

$-x^2 - x \leqq \log(1-x)$ …①

$g(x) = -x - \log(1-x)$ とおくと，

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$\therefore$ $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$g'(x) \geqq 0$

$g(x)$ は単調増加で，$g(x) \geqq g(0) = 0$

したがって，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において，

$\log(1-x) \leqq -x$ …②

①，② より，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において，

$-x^2 - x \leqq \log(1-x) \leqq -x$ が成り立つ ▨

(2) a_n の各因数 $1 - \frac{k}{2n^2}$ は正なので，$a_n > 0$

$\therefore$ $b_n = \log a_n$ とおくと．

$$\begin{aligned} b_n &= \log\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)\left(1 - \frac{2}{2n^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{2n^2}\right) \\ &= \log\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + \log\left(1 - \frac{2}{2n^2}\right) + \cdots + \log\left(1 - \frac{n}{2n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{k}{2n^2}\right) \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq \frac{k}{2n^2} \leqq \frac{1}{2}$ をみたすから，(1) より，

$$-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2 - \frac{k}{2n^2} \leqq \log\left(1 - \frac{k}{2n^2}\right) \leqq -\frac{k}{2n^2}$$ が成り立つ

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{4n^4} - \frac{k}{2n^2}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{k}{2n^2}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2n^2}\right)$$

$$\therefore -\frac{1}{4n^4}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \leqq b_n \leqq -\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\therefore -\frac{6n^3+8n^2+3n+1}{24n^3} \leqq b_n \leqq -\frac{n+1}{4n}$$

$n\to\infty$ のとき，$\to -\frac{1}{4}$　　$n\to\infty$ のとき，$\to -\frac{1}{4}$

$\therefore$ はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{4}$

$a_n = e^{b_n}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = \underline{e^{-\frac{1}{4}}}$ //