

2016年医学部第2問

2  $r$  を  $1 < r < 3$  を満たす実数,  $k$  を  $|r - 2| < k < 1$  を満たす実数とする. また, 次の関数  $f(x)$  を考える.

$$f(x) = rx(1 - x)$$

以下の問いに答えよ.

(1)  $f(x) = x$  を満たす  $x$  を求めよ.

以下の問題では, (1) で求めた  $x$  のうちで正のものを  $x_r$  とする.

(2) 次の条件

$$|x - x_r| < a \text{ を満たすすべての } x \text{ について } |f'(x)| < k$$

が成り立つような正の実数  $a$  が存在することを証明せよ.

(3) (2) の  $a$  に対して, 数列  $\{x_n\}$  を

$$|x_1 - x_r| < a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める.

(i) すべての自然数  $n$  について  $|x_n - x_r| < a$  であることを証明せよ.

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_r$  を証明せよ.