2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が以下の漸化式をみたすとする.

$$a_1 = 10,\quad b_1 = 24,\quad a_{n+1} = 2a_n - 8,\quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 6 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(2) 3辺の長さが, それぞれ a_2, b_2, 6 である三角形は存在しないことを示せ.

(3) 3辺の長さが, それぞれ a_n, b_n, 6 である三角形が存在するような n の値をすべて求めよ.

※ 三角形の成立条件

最大辺の長さ < 残り2つの辺の長さの和.

(1) $a_{n+1} - 8 = 2(a_n - 8)$

∴ 数列 $\{a_n - 8\}$ は初項 $a_1 - 8 = 2$, 公比 2 の等比数列.

∴ $a_n - 8 = 2 \cdot 2^{n-1}$ 　∴ $\underline{a_n = 2^n + 8}$ //

$b_{n+1} - 12 = \frac{1}{2}(b_n - 12)$

∴ 数列 $\{b_n - 12\}$ は初項 $b_1 - 12 = 12$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列.

∴ $b_n - 12 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 　∴ $\underline{b_n = 12\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$ //

(2) (1)より, $a_2 = 12$, $b_2 = 18$ となり, $6 + 12 = 18$ より

∴ 三角形の成立条件を満たさない ▨

(3). $a_n \geqq 10$, $b_n \geqq 12$ より, 最大辺の長さは, a_n または b_n.

$a_n \geqq b_n \iff 2^n + 8 \geqq 12 + 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \iff (2^n)^2 - 4 \cdot 2^n - 24 \geqq 0 \iff 2^n \geqq 2 + 2\sqrt{7}$

∴ $a_n \geqq b_n \iff n \geqq 3$

$6 + b_n > a_n$

このとき, $\underline{6 + 12 + 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n > 2^n + 8}$ が成り立てば三角形が存在する

∴ $(2^n - 12)(2^n + 2) < 0$ 　$2^n > 0$ より, $2^n < 12$ 　∴ $n = 3$

また, $n = 2$ のときは, (2) で存在しないことを示した.

$n = 1$ のときは, $a_1 = 10$, $b_1 = 24$ より, $10 + 6 < 24$ ∴ 存在しない 　∴ $\underline{n = 3}$ //