2015年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 正弦，余弦に関する加法定理

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cdots ① \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \cdots ② \end{cases}$$

を用いて等式

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

を証明せよ.

(2) 関数 $y=\sin 3x+3\cos 2x+6\sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値をすべて求めよ.

(1) $\sin(x+2x) = \sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x$ （∵①に $\alpha=x$, $\beta=2x$ を代入）

$= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x \cdot 2\sin x \cos x$

$= \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\sin x(1-\sin^2 x)$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

∴ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ が成り立つ ▨

(2) (1)の結果より.

$y = 3\sin x - 4\sin^3 x + 3(1-2\sin^2 x) + 6\sin x$

$= -4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 9\sin x + 3$

$t=\sin x$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ とおくと.

$y = -4t^3 - 6t^2 + 9t + 3$

∴ $y' = -12t^2 - 12t + 9$

$= -3(2t-1)(2t+3)$

∴ $-1 \leqq t \leqq 1$ より. $y'=0$ となるのは. $t=\frac{1}{2}$

$\sin x = -1$ より $x=\frac{3}{2}\pi$ のとき.

$\sin x = \frac{1}{2}$ より. $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき.

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	-8	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	2

∴ 右の増減表より. 最大値は $\frac{11}{2}$ $\left(x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$, 最小値は -8 $\left(x=\frac{3}{2}\pi\right)$ //