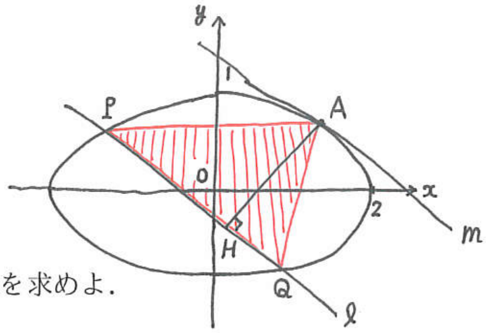
九州工業大学

2016年 工学部 第3問　1枚目/2枚

$\boxed{3}$ $a<0$，b を実数とする．楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と直線 $\ell: y=ax+b$ が異なる2個の共有点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ を持つとし，ℓ に平行な直線 m が第1象限の点Aにおいて C と接しているとする．次に答えよ．

(1) b の値の範囲を a を用いて表せ．
(2) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．
(3) x_2-x_1 を a，b を用いて表せ．
(4) 三角形APQの面積 S を a，b を用いて表せ．
(5) b が(1)で求めた範囲を動くとき，(4)で求めた S の最大値を求めよ．



(1) $x^2+4(ax+b)^2=4$

$\therefore (4a^2+1)x^2+8abx+4b^2-4=0 \cdots ①$

判別式をDとすると，

$\frac{D}{4}=(4ab)^2-(4a^2+1)(4b^2-4)$

$=4(4a^2-b^2+1)$

$D>0$ より，$b^2<4a^2+1$

$\therefore \underline{-\sqrt{4a^2+1}<b<\sqrt{4a^2+1}}$ //

(3) ①において，解と係数の関係より，

$x_1+x_2=-\frac{8ab}{4a^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4(b^2-1)}{4a^2+1}$

$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$=\frac{64a^2b^2}{(4a^2+1)^2}-\frac{16(b^2-1)}{4a^2+1}$

$=\frac{16(4a^2+1-b^2)}{(4a^2+1)^2}$

(1)より，$4a^2+1-b^2>0$，$x_2-x_1>0$ より

$\underline{x_2-x_1=\frac{4\sqrt{4a^2+1-b^2}}{4a^2+1}}$ //

(2) ①の判別式Dが $D=0$ となるのは，

$b=\pm\sqrt{4a^2+1}$ のときであり，

このうち，第1象限に接点をもつのは $b>0$

のときなので，$b=\sqrt{4a^2+1}$

$\therefore \underline{m: y=ax+\sqrt{4a^2+1}}$ //

(4) Aから ℓ に下ろした垂線の足をHとすると，

点と直線のキョリ公式と $\mathrm{A}\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \frac{1}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$

であることから，

$\mathrm{AH}=\frac{\left|-\frac{4a^2}{\sqrt{4a^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{4a^2+1}}+b\right|}{\sqrt{a^2+1}}$

$=\frac{\sqrt{4a^2+1}-b}{\sqrt{a^2+1}}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)\cdot\sqrt{a^2+1}\cdot\mathrm{AH}$

$=\frac{2\sqrt{4a^2+1-b^2}}{4a^2+1}\cdot(\sqrt{4a^2+1}-b)$

$=\underline{2\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}\cdot\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)}$ //

0002269630377999

九州工業大学

2016年 工学部 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a<0$，bを実数とする．楕円$C: x^2+4y^2=4$と直線$\ell: y=ax+b$が異なる2個の共有点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$を持つとし，ℓに平行な直線mが第1象限の点AにおいてCと接しているとする．次に答えよ．

(1) bの値の範囲をaを用いて表せ．

(2) 直線mの方程式をaを用いて表せ．

(3) x_2-x_1をa，bを用いて表せ．

(4) 三角形APQの面積Sをa，bを用いて表せ．

(5) bが(1)で求めた範囲を動くとき，(4)で求めたSの最大値を求めよ．

(5) $x=\dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とおくと，(1)より，$-1<x<1$

$$S=2\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x)$$

$$\therefore S'=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x)+2\sqrt{1-x^2}\cdot(-1)$$

$$=\frac{2(2x^2-x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
S'		$+$	0	$-$	
S	(0)	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	(0)

$\therefore$ Sの最大値は右の増減表より，

$\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ //