0000345454569999

岡山県立大学

2012年 第4問

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\int \cos^3 x\,dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\int_a^{a+\pi} |x|\cos x\,dx$ を求めよ．ただし，aは実数とする．

(注) (1) は $\int \cos x(1-\sin^2 x)\,dx$ として計算すると $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ となるが値は同じなので，どちらでも正解である．

(1) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ より．$\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$

$$\therefore \int \cos^3 x\,dx = \int \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\,dx$$

$$= \underline{\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C}\ _{//} \quad (C\text{は積分定数})$$

$(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ も可$)$

(2) $$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= \underline{x\sin x + \cos x + C}\ _{//} \quad (C\text{は積分定数})$$

(3) (i) $a \geqq 0$ のとき

$$(与式) = \int_a^{a+\pi} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_a^{a+\pi}$$

$$= (a+\pi)\sin(a+\pi) + \cos(a+\pi) - a\sin a - \cos a$$

$$= -(2a+\pi)\sin a - 2\cos a$$

(ii) $a < -\pi$ のとき

$$(与式) = -\int_a^{a+\pi} x\cos x\,dx$$

$$= (2a+\pi)\sin a + 2\cos a$$

(iii) $-\pi \leqq a < 0$ のとき

$$(与式) = \int_a^0 -x\cos x\,dx + \int_0^{a+\pi} x\cos x\,dx = -2 - \pi\sin a$$

(i)〜(iii) より

$$\begin{cases} -(2a+\pi)\sin a - 2\cos a & (a \geqq 0\text{ のとき}) \\ (2a+\pi)\sin a + 2\cos a & (a < -\pi\text{ のとき}) \\ -2 - \pi\sin a & (-\pi \leqq a < 0\text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{—}_{//}$$